

全变分耦合图像去噪模型

汪美玲^{1,2,3}, 周先春^{1,2,3}, 周林锋^{1,2,3}, 石兰芳⁴

- (1. 南京信息工程大学电子与信息工程学院, 江苏 南京 210044;
2. 南京信息工程大学江苏省大气环境与装备技术协同创新中心, 江苏 南京 210044;
3. 南京信息工程大学江苏省气象探测与信息处理重点实验室, 江苏 南京 210044;
4. 南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

摘要: 针对 TV 模型去噪后图像容易产生“阶梯效应”的现象, 提出一种全变分耦合图像去噪模型。首先, 根据去噪过程中图像梯度的变化趋势, 构造一个趋势保真项, 该保真项不但能有效去除图像噪声, 而且能抑制“阶梯效应”。然后用小波在频域里对图像进行系数分解, 利用 Canny 算法的边缘检测特性, 设计控制函数, 控制能量的扩散方向, 保持了 TV 模型和趋势保真项的优点, 能够在保护图像边缘纹理等细节信息的同时, 抑制“阶梯效应”。实验结果表明, 新模型的峰值信噪比、结构相似度、视觉效果均有显著提高。另外, 所提模型的运行时间较短。

关键词: 图像去噪; Canny 算法; 趋势保真项; 控制函数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

Coupling image denoising model based on total variation

WANG Mei-ling^{1,2,3}, ZHOU Xian-chun^{1,2,3}, ZHOU Lin-feng^{1,2,3}, SHI Lan-fang⁴

- (1. School of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China;
2. Jiangsu Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China;
3. Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Observation and Information Processing, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China;
4. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: The total variation (TV) model used in image denoising may produce “staircase effect”. A coupling image denoising model based on total variation was proposed. First, a trend fidelity term based on the change tendency of image gradient was established. The fidelity term could not only remove image noise, but also restrain “staircase effect”. Then, wavelet was used to decompose coefficient in frequency domain, control functions based on the edge detection ability of Canny algorithm were designed. The control functions control energy spread direction, the advantages of TV model and trend fidelity term are maintained, edge and texture details were protected, and “staircase effect” was also suppressed. Experiment results show that peak signal to noise ratio (PSNR), structure similarity (SSIM) and visual effects of the novel model are much better. Moreover, the running time of the novel model is shorter.

Key words: image denoising, Canny algorithm, trend fidelity term, control function

收稿日期: 2015-05-10; 修回日期: 2015-10-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.11202106, No.61201444); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(No.20123228120005); 江苏省“信息与通信工程”优势学科建设基金资助项目; 江苏省自然科学基金资助项目(No.BK20131005); 江苏省青蓝工程和江苏省高校自然科学研究基金资助项目(No.13KJB170016)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(No.11202106, No.61201444), The Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (No.20123228120005), The Jiangsu Information and Communication Engineering Preponderant Discipline Platform, The Natural Science Foundation of Jiangsu Province(No.BK20131005), The Jiangsu Qing Lan Project and the Natural Sciences Foundation of the Universities of Jiangsu Province (No.13KJB170016)

1 引言

图像处理技术被广泛应用于许多学科领域，而图像去噪是图像恢复领域中比较早的研究内容之一^[1-6]。好的去噪方法能够兼顾图像噪声的去除和边缘纹理等细节信息的保留，还能克服图像边缘轮廓模糊的弊端。

在偏微分方程(PDE, partial differential equation)的应用中，Rudin 等^[7]首次提出了基于图像全变分正则化的模型(TV 模型)，此模型较好地保持了图像的边缘纹理等细节特征。随后，在基于 TV 模型的图像去噪方法方面，出现了大量的研究成果^[8-11]。在基于概率论、小波等的图像去噪方面，最近，文献^[12]提出了一种 NLM 滤波器，该滤波器较好地保持了图像纹理和细节特征，但是计算复杂度高。Dabov 等^[13]提出了 BM3D 去噪方法，该方法去噪后的图像不仅有较高的信噪比，而且视觉效果也很好。Deledalle 等在文献^[14]中提出了 PPB (probabilistic patch-based) 滤波器，该滤波器在合成孔径雷达(SAR, synthetic aperture radar)图像的滤波上取得了较好的效果，但是这种滤波器耗时过长，不利于实际应用，而其非迭代的方法又抑制了滤波后图像的纹理和细节特征。在基于小波变换的去噪方法中，小波硬阈值去噪算法(WHT)和小波软阈值去噪算法(WST)是较为有效的降噪手段^[15]。目前，基于小波阈值的图像去噪取得了许多研究成果^[16-18]。此外，在小波变换系中，第二代曲波、Contourlet 变换、波原子等小波的理论框架已经比较成熟，是当前研究的热点，被广泛应用于图像去噪中。2008 年，朱为等在文献^[19]中提出一种基于第 2 代曲波变换的尺度相关图像去噪方法，该方法明显优于小波图像去噪方法，并且相对于单纯的阈值收缩去噪也有很大提高。2011 年，贾建等^[20]提出的基于正态逆高斯模型的非下采样 Contourlet 变换图像去噪算法，能有效去除图像中高斯白噪声，提高图像的峰值信噪比，保持图像的边缘特征。刘金华等^[21]在 2011 年提出了基于双树复小波与波原子的图像扩散滤波算法，该算法在对含噪图像滤波的同时，能够较好地保持图像的边缘和纹理等细节信息。

针对大部分偏微分方程模型去噪后图像容易产生“阶梯效应”的问题，本文提出一种全变分耦合图像去噪模型。该模型在 TV 模型的基础上，构

造了一个能够有效抑制“阶梯效应”的趋势保真项，再用小波对图像进行系数分解，利用 Canny 算法^[22]的边缘检测特性，设计控制函数，用来控制 TV 模型和趋势保真项。新模型在保护图像边缘纹理等细节信息的同时，抑制了“阶梯效应”。

2 改进的去噪模型

2.1 TV 模型

TV 模型利用噪声图像总变分比无噪声图像总变分大的性质，构造能量泛函，转化为求解偏微分方程，TV 模型对应的能量泛函为

$$E(I) = \int |\nabla I| dW + l \int |I - I_0|^2 dW \quad (1)$$

其中， I 为去噪后图像， I_0 为噪声图像， ∇I 为图像像素的梯度， l 为拉格朗日算子，其 Euler-Lagrange 方程为

$$l(I - I_0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right) = 0 \quad (2)$$

用梯度下降流解式(2)，可得 TV 模型为

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right) - l(I - I_0) \quad (3)$$

其中， div 、 ∇ 分别为散度算子和梯度算子。

设 $\mathbf{h} = \frac{\nabla I}{|\nabla I|}$ 为梯度方向的单位向量， \mathbf{x} 为与 \mathbf{h}

垂直的切线向量，则

$$\begin{cases} \mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \begin{pmatrix} -I_y \\ I_x \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

I_{hh} 与 I_{xx} 分别是沿着图像边缘的梯度方向和切线方向的方向导数，则

$$\begin{cases} I_{hh} = \frac{I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \\ I_{xx} = \frac{I_x^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)得

$$I_{hh} + I_{xx} = I_{yy} + I_{yy} \quad (6)$$

对 TV 模型进行分解, 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}\right) &= \frac{1}{|\nabla I|} \nabla(\nabla I) + \nabla I \nabla\left(\frac{1}{|\nabla I|}\right) \\ &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{|\nabla I|} + (I_x, I_y) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \right) \right) \\ &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{|\nabla I|} + (I_x, I_y) \left(-\frac{I_x I_{xx} + I_y I_{yx}}{|\nabla I|^3}, -\frac{I_x I_{xy} + I_y I_{yy}}{|\nabla I|^3} \right) \\ &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{|\nabla I|} - \frac{I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{|\nabla I|^3} \\ &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{|\nabla I|} - \frac{I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \frac{1}{|\nabla I|} \\ &= \frac{I_{xx} + I_{hh}}{|\nabla I|} - \frac{I_{hh}}{|\nabla I|} \\ &= \frac{1}{|\nabla I|} I_{xx} + 0 I_{hh} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知, TV 模型梯度方向扩散系数是 0, 与梯度垂直的方向扩散系数是 $\frac{1}{|\nabla I|}$, 模型沿着

梯度方向几乎不扩散, 能够很好地保护图像的边缘。但是 TV 模型同样存在一些缺点, 通过上述 x 和 h 的定义可知, TV 模型在图像的所有像素点处都存在梯度方向和梯度垂直的方向, 但是在实际情况下, 图像的非边缘区域不存在这 2 个方向, 因此在图像的非边缘区域会产生虚假边缘, 即“阶梯效应”。

2.2 新模型的提出

通过以上分析, 建立如下所示的全变分耦合去噪新模型。

$$\min_I E(I) = a \left(\iint_{\Omega} |\nabla I| dx dy + \frac{l}{2} \iint_{\Omega} |I - I_0|^2 dx dy \right) + b \iint_{\Omega} |\nabla I - \nabla(G_s * I_0)|^2 dx dy \quad (8)$$

对该耦合去噪模型进行分析, 该模型的第一项 $\iint_{\Omega} |\nabla I| dx dy + \frac{l}{2} \iint_{\Omega} |I - I_0|^2 dx dy$ 是 TV 模型, 第二项 $\iint_{\Omega} |\nabla I - \nabla(G_s * I_0)|^2 dx dy$ 描述了图像变化趋势的相似度, 称为趋势保真项, 展开可得

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} |\nabla I - \nabla(G_s * I)|^2 dx dy \\ &= \iint_{\Omega} |\nabla I|^2 dx dy + \iint_{\Omega} |\nabla(G_s * I)|^2 dx dy - \\ &2 \iint_{\Omega} (\nabla I)^T (\nabla(G_s * I)) dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)可知, 趋势保真项的第一项是一个各向同性的扩散函数, 无论是在图像的平坦区域还是边缘区域, 趋势保真项都会起到平滑噪声的作用, 且如果去噪后的结果是分段常数, 在分段常数的区域上 $|\nabla I| = 0$, 这样会使该趋势保真项的值变大, 进一步地反作用于图像的分段常数结果上, 最终使图像变成分段平滑函数, 抑制图像的“阶梯效应”。另外, 因为

$$|\nabla I - \nabla(G_s * I_0)| \leq |\nabla I| + |\nabla(G_s * I_0)| \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} |\nabla I - \nabla(G_s * I_0)| dx dy \\ &\leq \iint_{\Omega} (|\nabla I| + |\nabla(G_s * I_0)|) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} |\nabla I| dx dy + \iint_{\Omega} |\nabla(G_s * I_0)| dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

又因为 I 和 I_0 均属于有界变差函数空间, 所以

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} |\nabla I| dx dy < +\infty \\ \iint_{\Omega} |\nabla(G_s * I_0)| dx dy < +\infty \end{cases} \quad (12)$$

由上述证明可知, 本文引入的趋势保真项 $\iint_{\Omega} |\nabla I - \nabla(G_s * I_0)|^2 dx dy$ 有界, 是可积的, 即本文提出的耦合去噪模型在有界变差函数空间中可积, 该趋势保真项不会改变 TV 模型保持边缘的能力。

由于新模型式(8)中函数 $|\nabla I|$ 是凸函数, 所以对任意两数 $a, b > 0$ ($a + b = 1$) 和两函数 I_1, I_2 , 有

$$|\nabla(aI_1 + bI_2)| \leq a|\nabla I_1| + b|\nabla I_2| \quad (13)$$

对于新模型式(8)中的函数 $|I - I_0|^2$, 因为

$$\begin{aligned} &|aI_1 + bI_2 - I_0|^2 \\ &= |a(I_1 - I_0) + b(I_2 - I_0)|^2 \\ &= a^2(I_1 - I_0)^2 + b^2(I_2 - I_0)^2 + 2ab(I_1 - I_0)(I_2 - I_0) \\ &= a(I_1 - I_0)^2 + b(I_2 - I_0)^2 - ab((I_1 - I_0) - (I_2 - I_0))^2 \\ &\leq a(I_1 - I_0)^2 + b(I_2 - I_0)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

所以，函数 $|I - I_0|^2$ 是凸函数。

对于新模型式(8)中的函数 $|\nabla I - \nabla(G_s * I_0)|^2$ ，因为

$$\begin{aligned} & |\nabla(aI_1 + bI_2) - \nabla(G_s * I_0)|^2 \\ &= |a\nabla I_1 - a\nabla(G_s * I_0) + b\nabla I_2 - b\nabla(G_s * I_0)|^2 \\ &= a^2 |\nabla I_1 - \nabla(G_s * I_0)|^2 + b^2 |\nabla I_2 - \nabla(G_s * I_0)|^2 + \\ & 2ab \langle \nabla I_1 - \nabla(G_s * I_0), \nabla I_2 - \nabla(G_s * I_0) \rangle \\ &= a |\nabla I_1 - \nabla(G_s * I_0)|^2 + b |\nabla I_2 - \nabla(G_s * I_0)|^2 - \\ & ab |(\nabla I_1 - \nabla(G_s * I_0)) - (\nabla I_2 - \nabla(G_s * I_0))|^2 \\ & a |\nabla I_1 - \nabla(G_s * I_0)|^2 + b |\nabla I_2 - \nabla(G_s * I_0)|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

所以，函数 $|\nabla I - \nabla(G_s * I_0)|^2$ 是凸函数。

综上，由式(13)~式(15)及 $a > 0, b > 0$ 可知，本文提出的耦合去噪模型式(8)是凸函数，即该模型存在唯一全局最优解。用梯度下降流解式(8)，可得耦合去噪模型的偏微分方程形式为

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a \operatorname{div} \left(\frac{1}{|\nabla I|} \nabla I \right) + b(\Delta I - G_s \times \Delta I_0) + al(I - I_0) \quad (16)$$

其中， I 为去噪后图像， I_0 为加入噪声后图像， div 、 ∇ 、 Δ 、 l 分别为散度算子、梯度算子、拉普拉斯算子、拉格朗日算子， a 、 b 为控制函数， $0 \leq a, b \leq 1, b = 1 - a$ 。在边缘处 $a \rightarrow 1, b \rightarrow 0$ ，TV 模型发挥主要扩散作用，能较好地保护边缘纹理等细节信息，抑制边缘上的噪声。在平坦区域 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 1$ ，趋势保真项发挥主要作用，能够最大程度地去除平坦区域的噪声。 $G_s(x, y) = \frac{1}{2ps^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2s^2}\right)$ 是高斯核函数， s 为尺度函数。文中*和 \times 都表示高斯核函数对图像的卷积作用。

由以上分析可知，新模型综合了 TV 模型和趋势保真项两者的优点，但控制函数的选取很关键。设计控制函数时，如何判断图像某一区域为边缘纹理区域是首要问题，在许多的边缘检测算子中，Canny 算法有着严格的边缘检测评价标准，本文利用 Canny 算法进行图像边缘检测，但该算法用于边缘检测时，只能检测到图像的突出边缘信息，不能检测到图像封闭轮廓内部的信息，不利于含噪图像边缘轮廓的提取，故本文首先用经典的离散正交小波分解噪声图像，得到含噪声较少的低频分量 I_{LL} ，在 I_{LL} 低频分量中，用 Canny 算法对 I_{LL} 做处理，得

到图像的边缘区域 C ，然后，设 $V(i, j)$ 表示点 (i, j) 的边缘点，且 $V(i, j) = z$ ， z 是大小为 $M \times N$ 边缘区域 C 的窗口， $M \times N$ 窗口的大小是根据 Canny 算法中采用 $M \times N$ 邻域一阶偏导的有限差分，计算平滑后图像中各点的梯度值和梯度方向来确定，则设计的控制函数为

$$a = \begin{cases} 1, & V(i, j) = z \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (17)$$

在式(17)中，若点 (x, y) 为边缘点，则以点 (x, y) 为中心， $M \times N$ 为窗口大小，确定了一个局部的区域，则该区域的控制函数 $a = 1$ ，即在这个区域 TV 模型发挥主要作用，起到保护图像边缘纹理等细节信息的作用。若点 (x, y) 为平坦区域时，则该区域的控制函数 $a = 0$ ，即在以点 (x, y) 为中心的区域，趋势保真项发挥主要作用，能够有效地去除图像的噪声。

2.3 全变分耦合去噪模型的数值解法

为了求解以上的全变分耦合去噪模型，本文用加性算子分裂(AOS)^[23]算法对式(16)进行数值离散化，则

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \right) + a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \right) - al(I - I_0) + b(\Delta I - G_s \times \Delta I_0) \quad (18)$$

构造式(18)差分格式，并进行数值逼近

$$\begin{aligned} I_{i,j}^{n+1} &= I_{i,j}^n + a^n \frac{\Delta t}{h} \left[\Delta_x \left(\frac{\Delta_x^x I_{i,j}^n}{\left((\Delta_x^x I_{i,j}^n)^2 + (m(\Delta_x^x I_{i,j}^n, \Delta_y^y I_{i,j}^n))^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) + \right. \\ & \left. \Delta_y \left(\frac{\Delta_y^y I_{i,j}^n}{\left((\Delta_y^y I_{i,j}^n)^2 + (m(\Delta_x^x I_{i,j}^n, \Delta_y^y I_{i,j}^n))^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] - \\ & a^n \Delta t l^n (I_{i,j}^n - I_0(ih, jh)) + \\ & b^n \Delta t (\Delta_x^x I_{i,j}^n + \Delta_y^y I_{i,j}^n - G_s \times (\Delta_x^x I_{0i,j}^n + \Delta_y^y I_{0i,j}^n)) \\ &= I_{i,j}^n + a^n \frac{\Delta t}{h} \left[\frac{1}{R_{i,j}^n} I_{i+1,j}^n - \left(\frac{1}{R_{i,j}^n} + \frac{1}{R_{i-1,j}^n} \right) I_{i,j}^n + \frac{1}{R_{i-1,j}^n} I_{i-1,j}^n + \right. \\ & \left. \frac{1}{S_{i,j}^n} I_{i,j+1}^n - \left(\frac{1}{S_{i,j}^n} + \frac{1}{S_{i,j-1}^n} \right) I_{i,j}^n + \frac{1}{S_{i,j-1}^n} I_{i,j-1}^n \right] - \\ & b^n \Delta t l^n (I_{i,j}^n - I_0(ih, jh)) + \\ & b^n \Delta t (\Delta_x^x I_{i,j}^n + \Delta_y^y I_{i,j}^n - G_s \times (\Delta_x^x I_{0i,j}^n + \Delta_y^y I_{0i,j}^n)) \end{aligned} \quad (19)$$

其中,

$$\Delta_m^x = m(I_{iml,j} - I_{i,j}), \Delta_m^y = m(I_{i,jml} - I_{i,j}) \quad (20)$$

$$m(a,b) = \min \text{mod}(a,b) = \left(\frac{\text{sana} + \text{sgn} b}{2} \right) \min(|a|, |b|) \quad (21)$$

$$R_{i,j}^n = \sqrt{(\Delta_+^x I_{i,j}^n)^2 + (m(\Delta_+^x I_{i,j}^n, \Delta_-^y I_{i,j}^n))^2} \quad (22)$$

$$R_{i-1,j}^n = \sqrt{(\Delta_+^x I_{i-1,j}^n)^2 + (m(\Delta_+^x I_{i-1,j}^n, \Delta_-^y I_{i-1,j}^n))^2} \quad (23)$$

$$S_{i,j}^n = \sqrt{(\Delta_+^y I_{i,j}^n)^2 + (m(\Delta_+^x I_{i,j}^n, \Delta_-^x I_{i,j}^n))^2} \quad (24)$$

$$S_{i,j-1}^n = \sqrt{(\Delta_+^y I_{i,j-1}^n)^2 + (m(\Delta_+^x I_{i,j-1}^n, \Delta_-^x I_{i,j-1}^n))^2} \quad (25)$$

用向量与矩阵表示式(19), 则

$$I^{n+1} = \left[I + a^n \frac{\Delta t}{h} \sum_{l \in \{x,y\}} A_l(I^n) \right] I^n - a^n \Delta t l^n (I^n - I_0) + b^n (\Delta I^n - G_s \times \Delta I_0) \quad (26)$$

其中, 系数矩阵 $\sum_{l \in \{x,y\}} A_l(I^n)$ 对应的元素分别为

$$A_x(I^n) = \begin{cases} \frac{1}{R_{i,j}^n}, j = i + 1 \\ \frac{1}{R_{i-1,j}^n}, j = i - 1 \\ -\left(\frac{1}{R_{i,j}^n} + \frac{1}{R_{i-1,j}^n} \right), j = i \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (27)$$

$$A_y(I^n) = \begin{cases} \frac{1}{S_{i,j}^n}, j = i + 1 \\ \frac{1}{S_{i-1,j}^n}, j = i - 1 \\ -\left(\frac{1}{S_{i,j}^n} + \frac{1}{S_{i-1,j}^n} \right), j = i \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (28)$$

式(26)半隐式格式为

$$I^{n+1} = \left[I - a^n \frac{\Delta t}{h} \sum_{l \in \{x,y\}} A_l(I^n) \right]^{-1} I^n - a^n \Delta t l^n (I^n - I_0) + b^n \Delta t (\Delta I^n - G_s \times \Delta I_0) \quad (29)$$

由式(29)可得全变分耦合去噪模型的 AOS 格式为

$$I^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{x,y\}} \left(I - 2a^n \frac{\Delta t}{h} A_l(I^n) \right)^{-1} \left[I^n - b^n \Delta t l^n (I^n - I_0) + b^n \Delta t (\Delta I^n - G_s \times \Delta I_0) \right] \quad (30)$$

当 $i=1, L, N$, $j=1, \dots, M$ 时, 计算 $\left(I - 2a^n \frac{\Delta t}{h} A_{x,i}^n \right)$, $\left(I - 2a^n \frac{\Delta t}{h} A_{y,j}^n \right)$ 3 个对角线上的元素, 用追赶法求解 $\left(I - 2a^n \frac{\Delta t}{h} A_{x,i}^n \right) I_{ii}^{n+1} = I_{ii}^n - a^n \Delta t l^n (I_{ii}^n - I_0) + b^n \Delta t (\Delta I_{ii}^n - G_s \times \Delta I_0)$ 与 $\left(I - 2a^n \frac{\Delta t}{h} A_{y,j}^n \right) I_{2j}^{n+1} = I_{2j}^n - a^n \Delta t l^n (I_{2j}^n - I_0) + b^n \Delta t (\Delta I_{2j}^n - G_s \times \Delta I_0)$, 得到 I_1^{n+1} 、 I_2^{n+1} , 并计算

$$I^{n+1} = \frac{1}{2} (I_1^{n+1} + I_2^{n+1}) \quad (31)$$

按照式(31)计算, 便完成了一次迭代, 按照如上过程计算, 可得到较理想的图像。

综上, 本文方法总体去噪步骤如下。

步骤 1 用经典的离散正交小波对噪声图像 $I(x,y)$ 进行分解, 得到 1 个低频分量 I_{LL} 和 3 个高频分量 I_{HL} 、 I_{LH} 、 I_{HH} 。

步骤 2 选取图像的低频分量 I_{LL} , 用 Canny 算法在低频分量中设计控制函数 a 、 b , 如式(17)所示。

步骤 3 调节参数选取合适的控制函数, 利用新模型(31)分别对 I_{LL} 、 I_{HL} 、 I_{LH} 、 I_{HH} 做扩散去噪处理。

步骤 4 对步骤 3 处理后的各高频子带与低频子带进行重构, 得到去噪后的图像。

3 实验结果与分析

用 Matlab 软件进行实验仿真, 通过比较峰值信噪比(PSNR)和结构相似度(SSIM)^[24]来验证各算法的有效性 with 合理性。

$$PSNR = 10 \lg \left(\frac{255^2}{\frac{1}{WH} \sum_{i=1}^W \sum_{j=1}^H [X(i,j) - Y(i,j)]^2} \right) \quad (32)$$

$$SSIM = \left[l(X,Y)^a c(X,Y)^b s(X,Y)^g \right] \quad (33)$$

图像的分辨率为 $W \times H$ ， X 和 Y 是参与比较的图像，峰值信噪比越大越好， $l(\cdot)$ ， $c(\cdot)$ ， $s(\cdot)$ 分别是亮度、对比度、结构比较函数， $SSIM$ 的取值范围为 $(0,1)$ ， $SSIM$ 值越接近 1 表示滤波效果越好。

对 Buddha (512×512) 和 Lena (512×512) 图像加方差为 20 的高斯随机噪声进行实验，分别使用 TV 模型、NLM 方法、BM3D 方法、Non-iterative PPB

方法、Iterative PPB 方法、WHT 方法、WST 方法和本文模型进行处理。其中，ROF 模型和本文模型都采用 AOS 算法进行离散化，时间步长 (Δt) 为 0.2，迭代次数都为 7， l 取 0.02，且本文模型用对称性较好，在图像处理中能够减少重构时相移的小波 sym4 对图像进行 2 层分解。小波阈值处理中，同样用小波 sym4 进行系数分解。平滑结果如图 1 和图 2

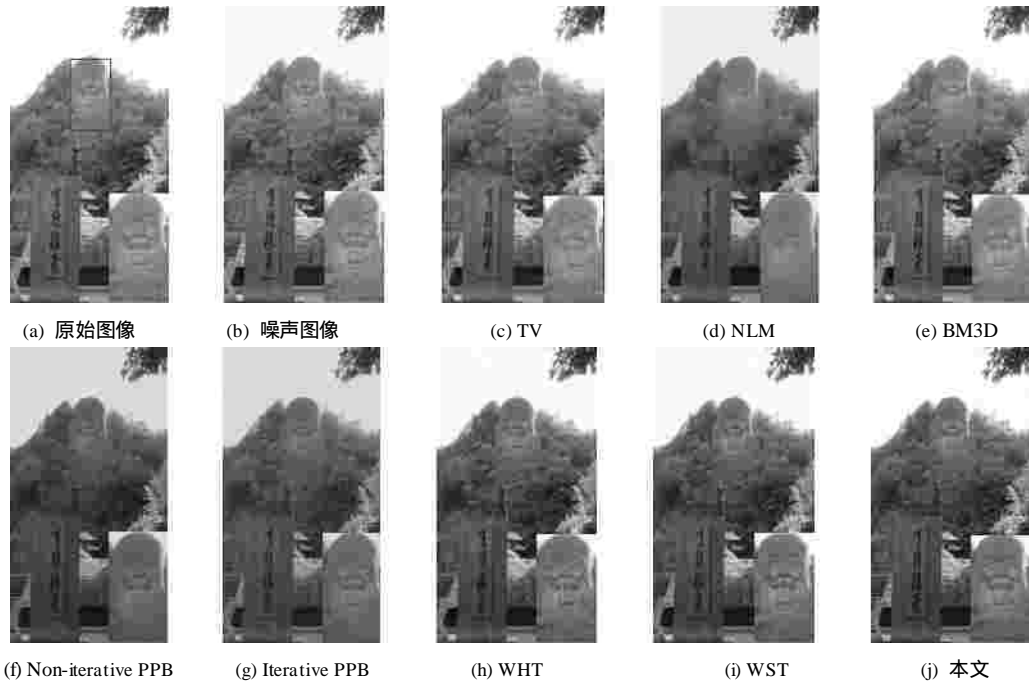


图 1 Buddha 图像各模型滤波结果

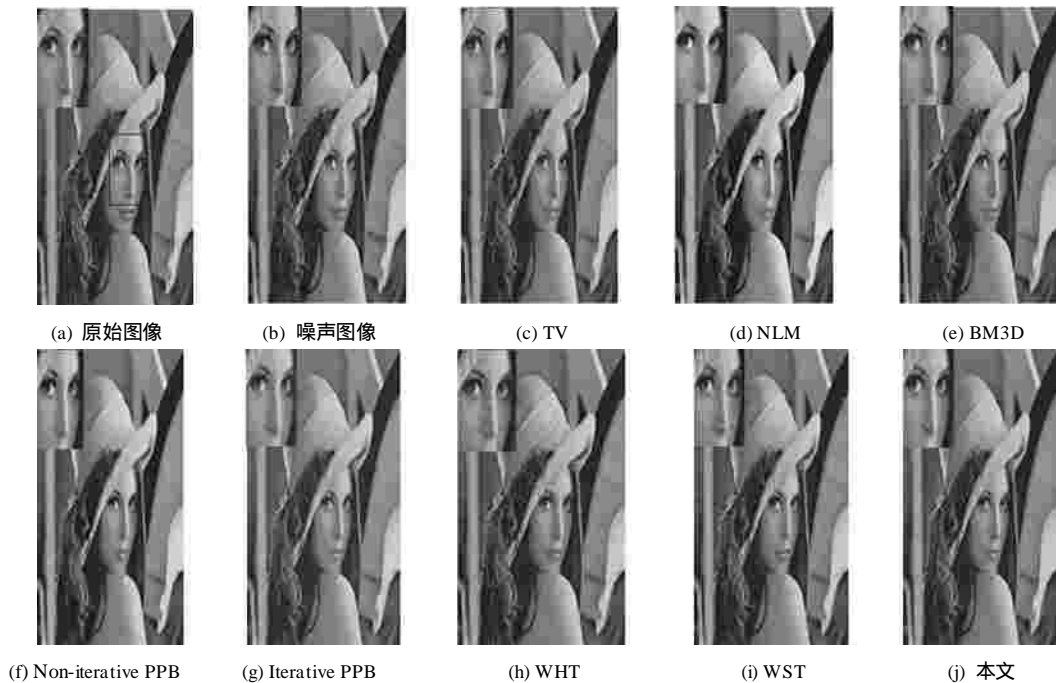


图 2 Lena 图像各模型滤波结果

所示, Buddha 图像的右下角和 Lena 图像的左上角分别为局部放大图像, 评价指标如表 1 所示。用 Canny 算子^[25]对各模型去噪结果进行边缘检测, 验证各模型边缘纹理等细节信息保护的情况, 如图 3、图 4 所示。此外, 为了验证本文所提模型的时效性, 比较了本文提到的几种模型以及本文模型的运行时间, 实验结果如图 5 所示, 由于 NLM 算法运行

时间较长, 将其运行时间柱状图单独分开。

从图 1(c)、图 2(c)的整体可视效果来看, TV 模型具有一定的滤波效果, 但是从图 1(c)右下角和图 2(c)左上角的局部放大图可以看到, Buddha 和 Lena 图像的脸部出现了“阶梯效应”, 这是因为 TV 模型在图像的非边缘区域不存在真实的梯度方向与梯度垂直方向, 因此在图像的非边缘区域会产生“阶

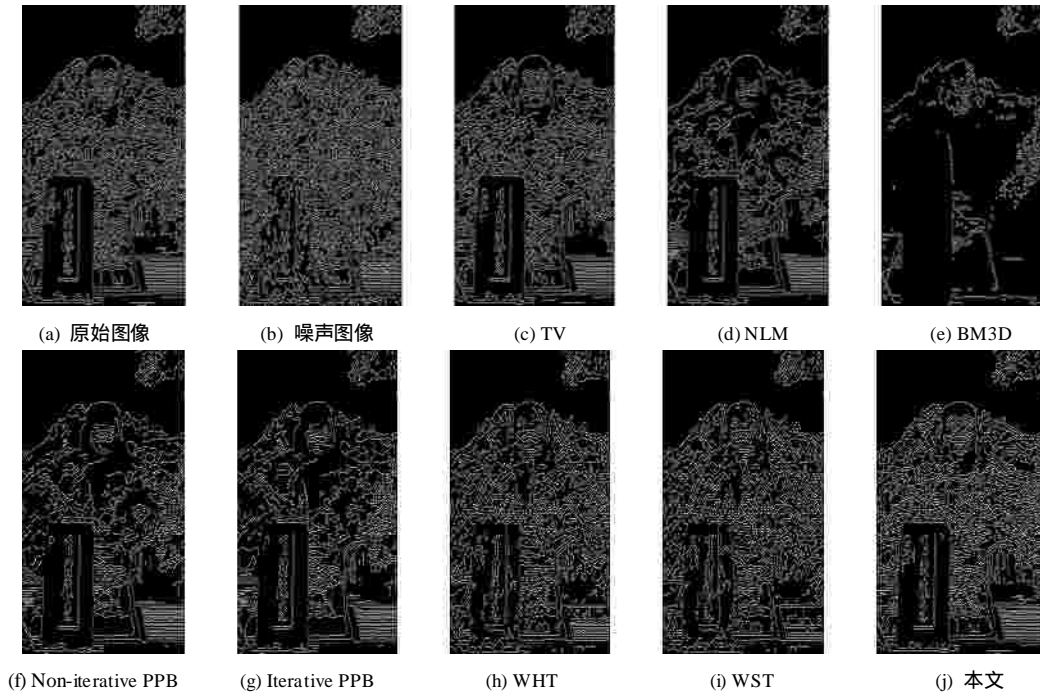


图 3 Buddha 图像各模型滤波的边缘提取

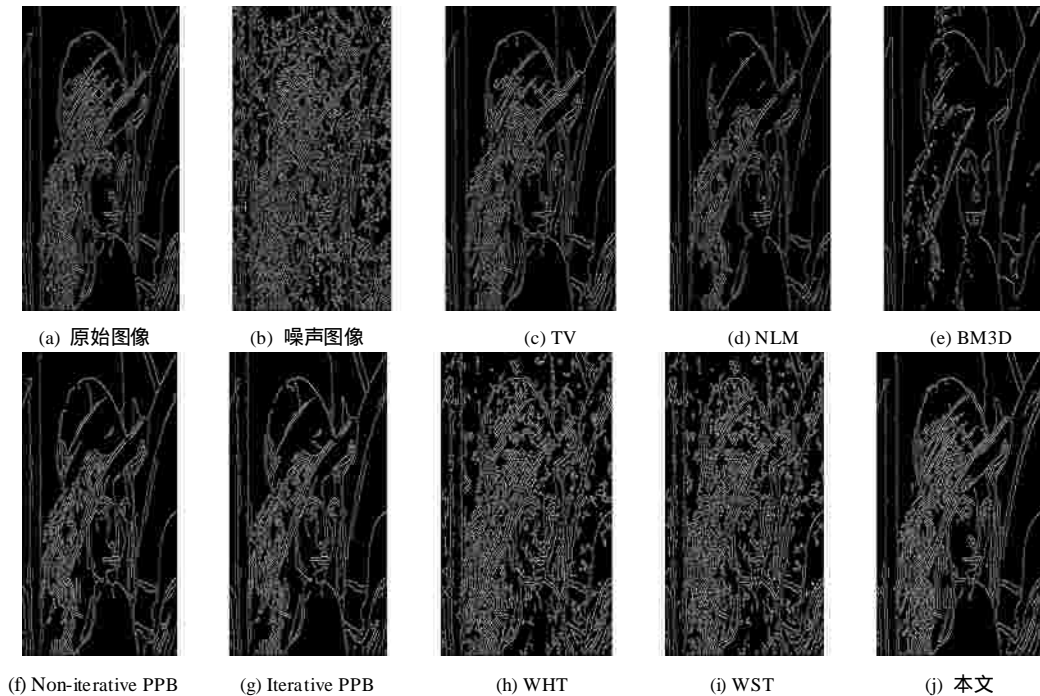


图 4 Lena 图像各模型滤波的边缘提取

梯效应”。由表 1 可知，尽管 NLM 方法取得了较好的去噪效果，但是对原图像结构信息保护不够，并且从图 3(d)、图 4(d)可以清楚地看到，NLM 处理后的图像丢失了很多边缘纹理等细节信息。由表 1、图 1(e)和图 3(e)可知，BM3D 去噪方法不仅有较高的信噪比，视觉效果也较好，但从图 3(e)、图 4(e)可以看出，该方法在保护图像细节信息方面有待提高。由表 1 和图 5 可知，Iterative PPB 方法对图像的处理效果较好，但是该方法耗时过长，不利于实际应用，而 Non-iterative PPB 方法虽然解决了 Iterative PPB 方法耗时过长的问题，但从图 3(f)、图 4(f)可以看到，该方法破坏了图像的边缘纹理等细节信息。从图 1(h)、图 1(i)、图 2(h)、图 2(i)可以看出，WHT 方法和 WST 方法滤波效果不太理想，虽然该方法能够较好地估计噪声方差，并去除图像中的噪声，但会将图像高频子带中的小波系数误认为

噪声系数而去除，导致图像的边缘、纹理等细节信息丢失，所以图像存在较严重的“阶梯效应”。从图 1(j)、图 2(j)可以看出，本文模型的可视性最好，因为本文模型用小波在频域里对图像进行系数分解，利用 Canny 算法的边缘检测特性，设计控制函数，控制能量的扩散方向，保持了 TV 模型和趋势保真项的优点，在保护图像边缘纹理等细节信息的同时，抑制了“阶梯效应”。另外，从图 5 可以看到，本文模型处理图像的时间也比较短，有利于实际应用。

此外，为进一步检验所提模型的性能，在不同方差噪声条件下，用峰值信噪比和结构相似度对滤波结果进行性能分析。从图 6 和图 7 可以看出，随着噪声方差的增大，本文模型的峰值信噪比和结构相似度在所有模型中最大，说明本文模型去噪性能最好。

表 1 Buddha 和 Lena 图像各模型滤波的 PSNR 与 SSIM 指标的比较

模型	指标	TV	NLM	BM3D	Non-iterative PPB	Iterative PPB	WHT	WST	本文方法
Buddha	PSNR	34.132 5	28.045 5	29.803 0	28.384 3	28.551 9	25.974 5	25.610 1	49.980 4
	SSIM	0.944 0	0.742 0	0.887 6	0.754 4	0.771 5	0.641 5	0.626 5	0.997 9
Lena	PSNR	41.411 9	32.759 6	35.121 4	33.114 1	32.891 0	30.341 4	30.102 4	55.904 8
	SSIM	0.981 5	0.889 1	0.961 6	0.886 5	0.892 4	0.812 1	0.808 8	0.999 1

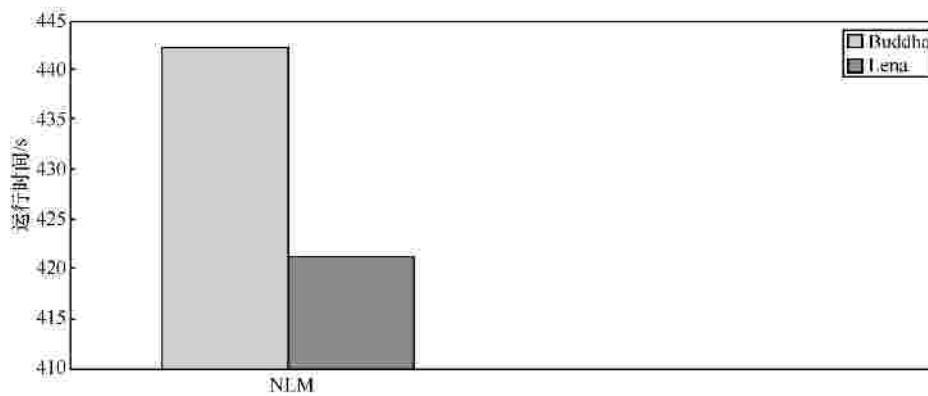
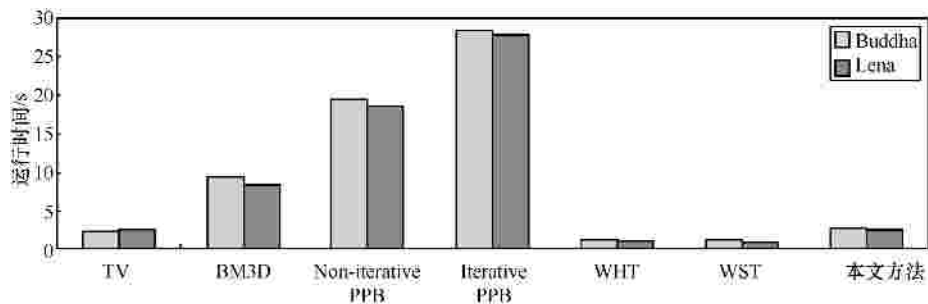


图 5 Buddha 和 Lena 图像各模型滤波运行时间

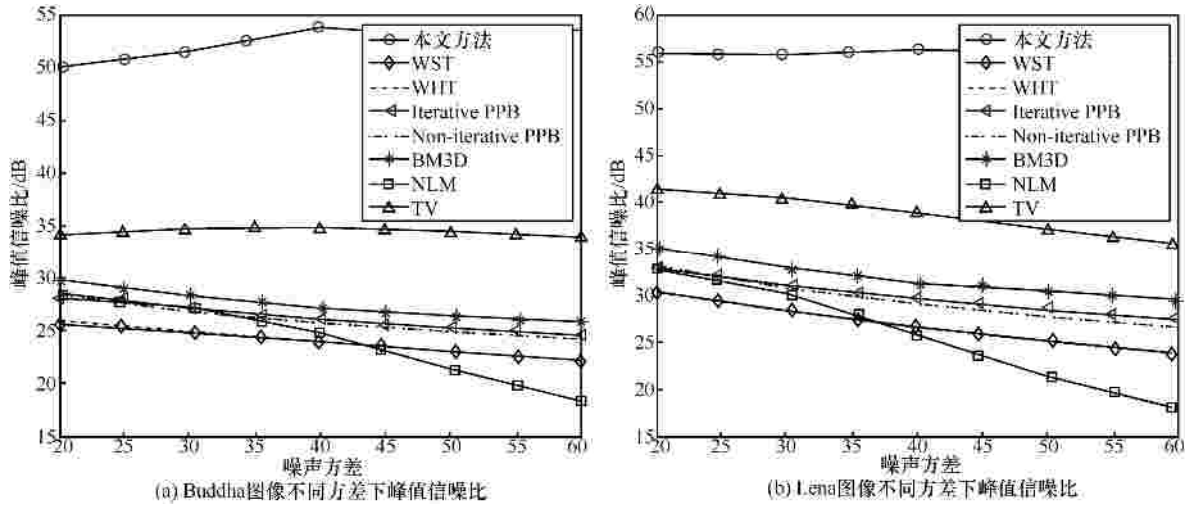


图 6 各模型不同方差噪声下峰值信噪比

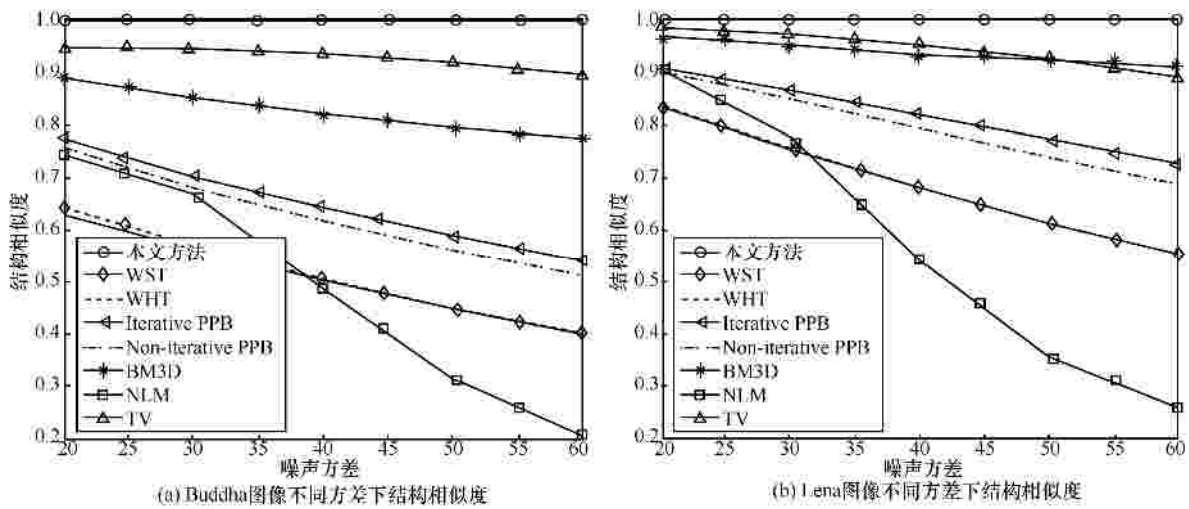


图 7 各模型不同方差噪声下结构相似度

4 结束语

针对图像噪声的滤除问题，为了在消除噪声的同时，最大程度地抑制图像的“阶梯效应”和保持图像的边缘纹理等细节信息，本文建立一种全变分耦合去噪模型。图像梯度在去噪过程中是变化的，根据梯度变化构造趋势保真项，利用了 Canny 算法的边缘检测特性，设计控制函数，控制能量扩散方向，保持了 TV 模型和趋势保真项的优点。本文模型不但能有效去除图像的噪声，而且能保护图像的边缘纹理信息和抑制图像的“阶梯效应”。实验结果表明，本文模型去噪效果非常理想。

参考文献：

[1] LI Z G, ZHENG J H, ZHU Z J. Weighted guided image filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(1): 120-128.

[2] YANG X, GAO X B, TAO D C, et al. An efficient MRF embedded level set method for image segmentation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(1): 9-21.

[3] SURYA PRASATH V B, VOROTNIKOV D. Weighted and well-balanced anisotropic diffusion scheme for image denoising and restoration[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2014, 17(1): 33-46.

[4] YANG M, ZHANG J H, MENG F Y, et al. Denoising method of X-ray phase contrast DR image for TRISO-coated fuel particles[J]. Particulate, 2013, 11(6): 695-702.

[5] LIU P, HUANG F, LI G Q, et al. Remote-sensing image denoising using partial differential equations and auxiliary images as priors[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2012, 9(3): 358-362.

[6] 席志红, 赵蓝飞, 张驰, 等. 基于变分模型的梯度域色阶映射算法[J]. 通信学报, 2015, 36(1): 1-8.

XI Z H, ZHAO L F, ZHANG C, et al. Tone mapping based on variational model in gradient domain[J]. Journal on Communications, 2015, 36(1): 1-8.

[7] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-268.

- [8] HUANG Y M, NG M, WEN Y W. A new total variation method for multiplicative noise removal[J]. SIAM Journal on Image Sciences, 2009, 2(1): 20-40.
- [9] HAM B, MIN D, SOHN K. Revisiting the relationship between adaptive smoothing and anisotropic diffusion with modified filters[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(3):1096-1101.
- [10] WU J, TANG C. PDE-based random-valued impulse noise removal based on new class of controlling functions[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(9): 2428-2438.
- [11] YANG M, LIANG J K, ZHANG J H, et al. Non-local means theory based Perona-Malik model for image denoising[J]. Neurocomputing, 2013, 120(1): 262-267.
- [12] ZHANG K K, GAO X B, LI X L. Single image super-resolution with non-local means and steering kernel regression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(11): 4544-4555.
- [13] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3D transform domain collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [14] DELEDALLE C A, DENIS L, TUPIN F. Iterative weighted maximum likelihood denoising with probabilistic patch-based weights[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(12): 2661-2672.
- [15] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [16] ZHANG Y H, DING Y, WANG L H. The improvement of ROF denoising model based on AOS and fourth-order PDE[J]. Procedia Engineering, 2011, 15(1): 2778-2782.
- [17] NIKPOUR M., HASSANPOUR H. Using diffusion equation for improving performance of wavelet-based image denoising techniques[J]. IET Image Processing, 2010, 4(6): 452-462.
- [18] KAMILOV U, BOSTAN E, UNSER M. Wavelet shrinkage with consistent cycle spinning generalizes total variation denoising[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(4): 187-190.
- [19] 朱为, 李国辉, 途丹. 一种基于第二代曲波变换的尺度相关图像去噪方法[J]. 中国图象图形学报, 2008, 13 (12): 2281-2285.
- ZHU W, LI G H, TU D. A scale correlation image denoising method based on the second generation curvelet transform [J]. Journal of Image and Graphics, 2008, 13 (12): 2281-2285.
- [20] 贾建, 陈莉. 基于正态逆高斯模型的非下采样 Contourlet 变换图像去噪模型[J]. 电子学报, 2011, 39 (7): 1563-1568.
- JIA J, CHEN L. Using normal inverse Gaussian model for image denoising in NSCT domain[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39 (7): 1563-1568.
- [21] 刘金华, 余莹. 基于双树复小波与波原子的图像扩散滤波[J]. 物理学报, 2011, 60(12): 124203-1 - 124203-2.
- LIU J H, SHE K. Image diffusion filtering based on dual tree complex wavelet and wave atoms[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(12): 124203-1-124203-2.
- [22] XU Q, VARADARAJAN S, CHAKRABARTI C, et al. A distributed

canny edge detector: algorithm and FPGA implementation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(7): 2944-2959.

- [23] WEICKERT J, TER H, ROMENY B M, et al. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 398-410.
- [24] WANG Z, BOVIK BOVIK A C, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.
- [25] CANNY J. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, 8(6): 679-698.

作者简介：



汪美玲 (1988-), 女, 安徽芜湖人, 南京信息工程大学硕士生, 主要研究方向为图像处理、模式识别等。



周先春 (1974-), 男, 安徽合肥人, 南京信息工程大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为信号与信息处理。



周林锋 (1991-), 男, 安徽蚌埠人, 南京信息工程大学硕士生, 主要研究方向为信号处理、图像处理等。



石兰芳 (1976-), 女, 安徽合肥人, 南京信息工程大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为非线性分析。